

REVISÃO DOS ÚLTIMOS 15 MINUTOS



DATAPREV

PERFIL 4

INTELIGÊNCIA DA INFORMAÇÃO



@Casa_Bushido

www.casabushido.com.br

© 2026 Casa Bushido. Todos os direitos reservados



**"Torne-se apto em
todas as posições... não
tenha uma postura
favorita."**

Miyamoto Musashi



@Casa_Bushido

www.casabushido.com.br

© 2026 Casa Bushidô. Todos os direitos reservados.

Sumário

O cargo	9
Matérias mais importantes	11
Eixo Temático I: Matemática	12
Cálculo: Funções	14
Cálculo: Limites	15
Cálculo: Derivadas	16
Cálculo: Derivadas Parciais	17
Cálculo: Máximos e Mínimos	18
Cálculo: Integrais	19
Álgebra Linear: Notação de Vetores e Matrizes	20
Produto Escalar e Produto Vetorial	21
Matriz Identidade, Inversa e Transposta	22
Transformações Lineares	23
Normas L1 e L2	24
Autovalores e Autovetores	25

Sumário

Eixo Temático II: Estatística aplicada	26
Probabilidade	28
Modelo de Probabilidade	29
Probabilidade Condicional	30
Estatística: Independência	31
Variáveis Aleatórias	32
Esperança, Variância e Covariância	33
Distribuições Contínuas e Discretas	34
Distribuições Multidimensionais: Matriz de Covariância	35
Teorema do Limite Central	36
Teste de Hipótese	37
Intervalo de Confiança	38
Estimador de Máxima Verossimilhança	39
Inferência Bayesiana	40
Coeficiente de Correlação de Pearson	41
Diagrama Boxplot e Avaliação de Outliers	42

Sumário

Eixo Temático III: Ciência de dados	43
IA Generativa	45
Aprendizado de Máquina Supervisionado	46
Aprendizado Supervisionado: Classificação	47
Aprendizado Supervisionado: Métricas de Avaliação	48
Aprendizado Supervisionado: Overfitting e Underfitting	49
Aprendizado Supervisionado: Regularização	50
Aprendizado Supervisionado: Seleção de Modelos	51
Aprendizado Supervisionado: Validação Cruzada	52
Aprendizado Supervisionado: Conjunto de Treino, Validação e Teste	53
Aprendizado Supervisionado: Trade-off entre Variância e Viés	54
Aprendizado Supervisionado: Regressão Linear e Regressão Logística	55
Aprendizado Supervisionado: Random Forests	56
Aprendizado de Máquina Não Supervisionado	57
Support Vector Machines — SVM	58
K-Nearest Neighbors — KNN	59
Redução de Dimensionalidade: PCA	60
K-Means	61

Sumário

Aprendizado de Máquina Não Supervisionado:	
Associação	63
Aprendizado de Máquina Não Supervisionado:	
Agrupamento	64
Redes Neurais	65
Redes Neurais Artificiais: Funções de Ativação	66
Redes Neurais Artificiais: Método do Gradiente	67
Redes Neurais Artificiais: Método do Gradiente Estocástico	68
Redes Neurais Artificiais: Backpropagation	69
Penalização com Normas L1 e L2	70
Redes Neurais Artificiais: CNN	71
Noções de Visão Computacional com CNN	72
Classificação de Imagens e Detecção de Objetos	73
Processamento de Linguagem Natural	74
ETL — Extract, Transform, Load	75
Manipulação, Tratamento e Visualização de Dados	76
Análise de Dados: Pandas	77
Análise de Dados: NumPy	78
Análise de Dados: Jupyter	79
Análise de Dados: R	80
Sistemas de Recomendação	81
Deep Learning	82
Mineração de Dados	83
Ferramenta SAS	84

Sumário

Eixo Temático IV: Linguagem de programação e software em ciência de dado 86

Matplotlib	88
Seaborn	89
Streamlit	90
Principais Bibliotecas R	91
Apache Spark	92
TensorFlow	93
SciPy	94
Keras	95
PyTorch	96

Eixo Temático V: Banco de dados

Modelagem de Dados: Conceitual, Lógica e Física	99
Normalização de Dados	100
Integridade Referencial	101
Modelagem Dimensional	102
Linguagem de Consulta Estruturada — SQL	103
Linguagem de Definição de Dados — DDL	104
Linguagem de Manipulação de Dados — DML	105
NoSQL	106
Banco de Dados em Memória	107
SGBD — Sistema Gerenciador de Banco de Dados	108

Apresentação

Olá pessoal! Obrigado por adquirirem o primeiro material da Casa Bushido, esse apoio é muito importante para um futuro brilhante que estou traçando para nós concurseiros de TI.

Esse material é totalmente direcionado para as específicas para o **cargo de Inteligência da informação**, cargo mais atual da área de TI. Órgãos que investem nessa área, são órgãos que vão inovar cada vez mais

A **revisão de 15 minutos** foi baseado nos meus materiais de revisão que juntei ao longo de 8 anos de estudo de concurso. Ele foi feito principalmente para revisar naqueles último minutos que estamos esperando para fazer a prova.

Este material não foi criado para estudo e nem para concurseiros iniciantes. Foi feito para revisão. Apesar de servir como base e também ter os assuntos mais cobrados ele não é para ensinar, é para revisar.

Seja bem vindo. E boa prova!



Com carinho
Vitor Scooby

O cargo

Análise do cargo

Este é um dos cargos mais atuais da TI e altamente estratégico para a DataPrev, já que a principal função é processar dados. Órgão de tem área própria para IA, demonstra grande maturidade e infraestrutura e consequentemente dá liberdade criativa para os servidores da área.

**Vagas
imediatas**

45

Vagas + CR

299

**Peso das específicas
na prova (2,5)**

65,2%

**Total de pontos
das específicas**

75 pt



Atribuições do cargo



Elaborar modelos preditivos e prescritivos usando métodos quantitativos e algoritmos de aprendizado de máquina.



Construir e otimizar **algoritmos estatísticos aplicados a Big Data** para suporte a políticas públicas (INSS/Previdência).



Executar tarefas de Engenharia de Dados (**ETL/ELT**) garantindo a integridade dos modelos.



Prestar consultoria interna de análise de dados, visualização de dados e IA.



Realizar **análise exploratória** massiva baseada em arquiteturas de Data Lake.



Matérias mais importantes

De todos cargos, as matérias desse cargo foram as mais estranhas. Muita matéria repetida, muita matéria que é continuação de outra. Matéria com nomes diferentes, locais diferentes, mas são a mesma coisa. Fica a dúvida se a matéria é importante para a prova, ou foi desleixo do examinador. Também, esse é um cargo novo nos concursos, é difícil basear em provas anteriores. Principalmente “botar peso” na incidência, já que a matéria de IA é comum nas provas, mas cargo de IA não.

Acredito que na parte específica 30% vai ser matemática e estatística e os outros 70% será IA e o resto

As matérias mais importantes baseadas nas últimas provas da FGV são:

- Estatística descritiva e inferencial
- IA
 - Aprendizado supervisionado (maior parte)
 - Aprendizado não supervisionado
 - Machine learning
 - Redes neurais

EIXO TEMÁTICO I

MATEMÁTICA



Quais matérias focar

O Coração da IA, claramente a prova não tratará a matemática elementar, direcionando seu arsenal ao cálculo multivariável e à estrutura dos espaços vetoriais, conhecimentos imperativos para compreender o funcionamento íntimo das redes neurais e modelos lineares.

Álgebra Linear: Autovalores e Autovetores

são cobrados frequentemente devido à sua aplicação direta em técnicas de redução de dimensionalidade, como o PCA

Derivadas Parciais e Máximos e Mínimos

associar estes temas a problemas práticos de otimização de modelos preditivos, focando na minimização da função de perda e na compreensão matemática do método do gradiente.

Matrizes, Vetores e Operações



CÁLCULO: FUNÇÕES

DO CONCEITO À APLICAÇÃO NO MUNDO REAL

Funções são relações que conectam cada elemento de um conjunto a um único elemento de outro. Elas descrevem padrões, mudanças e comportamentos em praticamente tudo ao nosso redor.

知識は未来を創る



DESCREVE
RELAÇÕES



MODELA
MUDANÇAS



PRESENTE EM
TUDO



BASE PARA
CIÊNCIAS



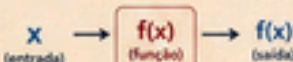
PODER PARA
SOLUCIONAR



DO SIMPLES
AO COMPLEXO

1 O QUE É UMA FUNÇÃO?

Uma função é uma regra que associa cada valor de entrada (x) a um único valor de saída ($f(x)$).



Cada entrada tem exatamente uma saída, mas várias entradas podem ter a mesma saída.

2 ANATOMIA DE UMA FUNÇÃO

1 **Domínio (D):** conjunto de todos os valores possíveis de x .

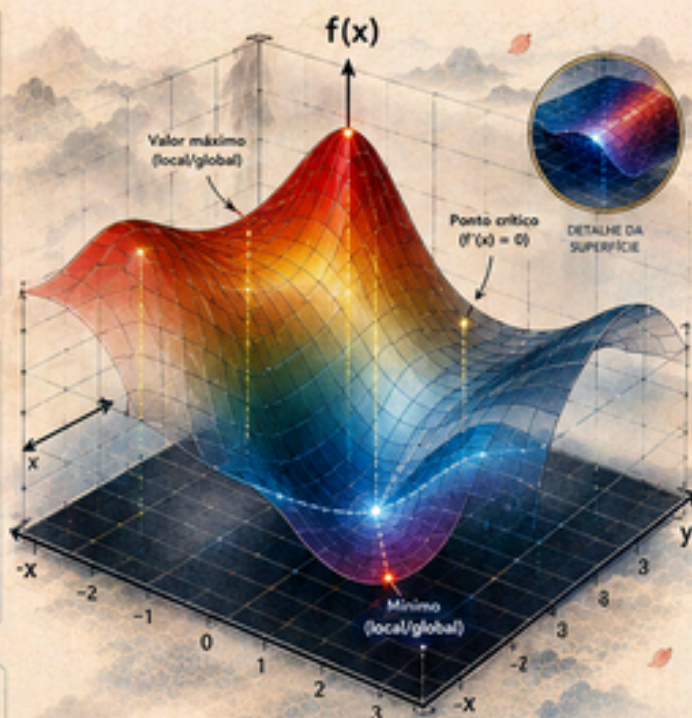
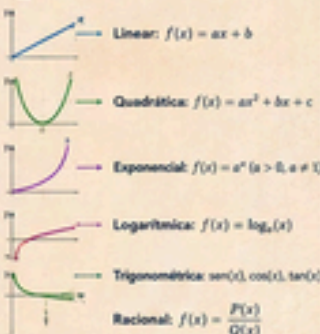
2 **Contradomínio:** conjunto dos valores possíveis de $f(x)$.

3 **Imagem ou Alcance:** valores efetivamente alcançados por $f(x)$.

4 **Variável Independente:** x (entrada).

5 **Variável Dependente:** $f(x)$ (saída).

3 TIPOS DE FUNÇÕES



4 CARACTERÍSTICAS

- ✓ Domínio bem definido
- ✓ Cada entrada tem uma única saída
- ✓ Podem ser contínuas ou descontínuas
- ✓ Podem crescer, decrescer ou oscilar
- ✓ Aplicáveis em diversas áreas

5 PROPRIEDADES

Domínio: onde a função existe

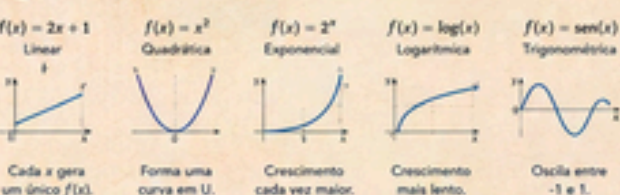
Imagem: valores que a função assume

Continuidade: sem quebras no gráfico

Monotonicidade: crescente ou decrescente

Paridade: $f(-x) = f(x)$ ou $f(-x) = -f(x)$

7 EXEMPLOS



8 FÓRMULAS ÚTEIS

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Taxa de variação média

$$\int_a^b f(x) dx$$

Integral (área sob a curva)

$$\frac{df}{dx}$$

Derivada (taxa de variação instantânea)

$$f'(x) = 0$$

Pontos críticos

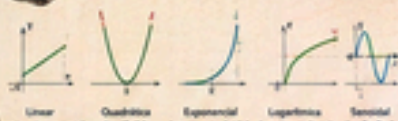
9 CURIOSIDADES

- Funções aparecem em todos os fenômenos naturais.
- A internet, redes e até o clima podem ser modelados por funções.
- Algumas funções não têm fórmula simples, mas são muito úteis!

計算は未来を築く

"Compreender funções é entender o mundo em movimento."

10 GRÁFICOS COMUNS



DADOS IMPORTANTES



LEMBRE-SE

As funções conectam ideias, resolvem problemas e nos ajudam a entender o mundo em constante mudança.

CÁLCULO: LIMITES

ENTENDENDO O COMPORTAMENTO DAS FUNÇÕES QUANDO x SE APROXIMA DE UM PONTO

FUNÇÃO APROXIMAÇÃO TENDÊNCIA CONTINUIDADE INFINITO

1 O QUE É LIMITE?

Límite é o valor que uma função se aproxima quando a variável independente se aproxima de um determinado ponto.

Notação:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$$

Lê-se: "o limite de $f(x)$ quando x tende a a é igual a L ".



2 LIMITES UNILATERAIS

Analisamos os limites pela esquerda e pela direita separadamente.



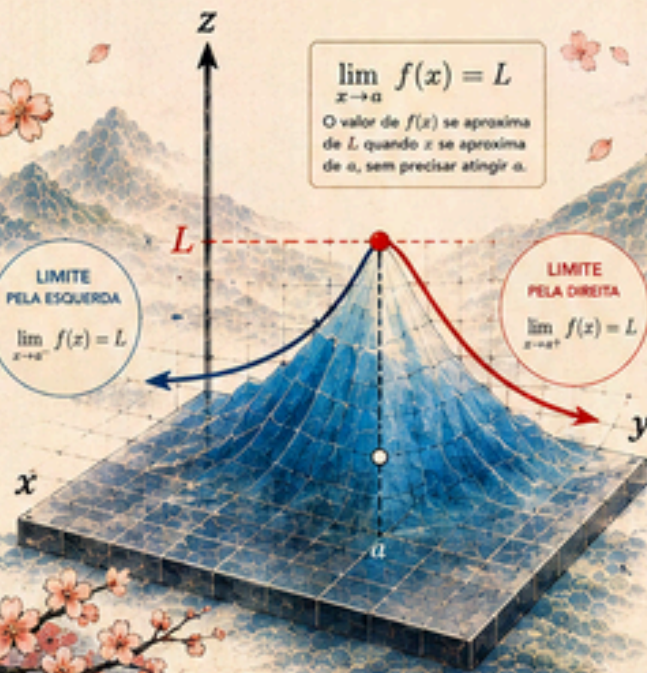
$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L_e$$

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L_d$$

Aproximação pela esquerda

Aproximação pela direita

Se $L_e = L_d = L$, então
 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$



LIMITE PELA ESQUERDA
 $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L$

LIMITE PELA DIREITA
 $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L$

IDEIA CENTRAL: O LIMITE DESCREVE A TENDÊNCIA, NÃO O VALOR EXATO EM UM PONTO.

EXISTÊNCIA DO LIMITE

O limite $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ existe se, e somente se:

- ✓ $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$ existe
- ✓ $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ existe
- ✓ $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$



3 PROPRIEDADES DOS LIMITES

Sejam c uma constante e $f(x), g(x)$ funções.

- 1 $\lim_{x \rightarrow a} c = c$
- 2 $\lim_{x \rightarrow a} k f(x) = k \lim_{x \rightarrow a} f(x)$
- 3 $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \pm g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow a} g(x)$
- 4 $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x)$
- 5 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)}$, $\lim_{x \rightarrow a} g(x) \neq 0$
- 6 $\lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^n = \left(\lim_{x \rightarrow a} f(x) \right)^n$
- 7 $\lim_{x \rightarrow a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}$ (quando definido)

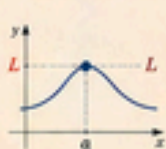
4 LIMITES IMPORTANTES

- $\lim_{x \rightarrow a} x = a$
- $\lim_{x \rightarrow a} c = c$
- $\lim_{x \rightarrow a} (kx) = ka$
- $\lim_{x \rightarrow a} (x^2) = a^2$
- $\lim_{x \rightarrow a} (x^n) = a^n$
- $\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{x} = \frac{1}{a}$, $a \neq 0$
- $\lim_{x \rightarrow a} \sqrt{x} = \sqrt{a}$, $a \geq 0$

5 TIPOS DE LIMITES

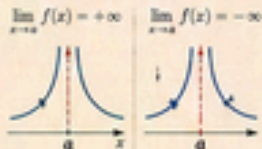
Límite Finito

A função se aproxima de um número real.



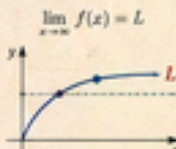
Límite Infinito

A função cresce ou decresce sem limites.



Límite no Infinito

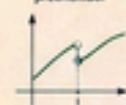
Comportamento da função quando x cresce sem limites.



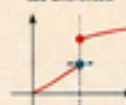
6 DESCONTINUIDADES

Mesmo que $f(x)$ não exista ou seja diferente de L , o limite pode existir.

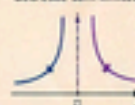
Removível
O furo pode ser preenchido.



De Salto
Os limites laterais são diferentes.

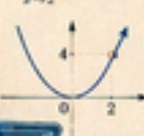


Infinita
A função cresce ou decresce sem limites.

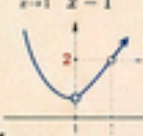


7 EXEMPLOS VISUAIS

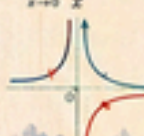
$$\lim_{x \rightarrow 2} (x^2) = 4$$



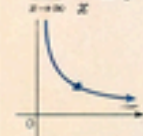
$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = 2$$



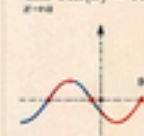
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} = \pm \infty$$



$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$$



$$\lim_{x \rightarrow 0} \sin(x) = \sin(0)$$



9 FATOS RÁPIDOS



Límites são a base da derivada e da integral.



Permitem modelar comportamentos contínuos.



São essenciais para entender taxas de variação.



Transformam o infinito em algo compreensível.

SEM LIMITES, NÃO HÁ CÁLCULO. SEM CÁLCULO, NÃO HÁ TECNOLOGIA.



10 RESUMO EM UMA LINHA

Límites descrevem o comportamento das funções quando nos aproximamos de um ponto ou do infinito.



APROXIMAÇÃO
Tendência



CONSISTÊNCIA
Coerência



CONTINUIDADE
Suavidade



COMPREENSÃO
Clareza



GRESSO
Evolução



CÁLCULO: DERIVADAS

A TAXA DE VARIAÇÃO QUE REVELA O COMPORTAMENTO DAS FUNÇÕES



VELOCIDADE
TAXA DE VARIAÇÃO



TANGENTE
À CURVA



MÁXIMOS E MÍNIMOS
OTIMIZAÇÃO



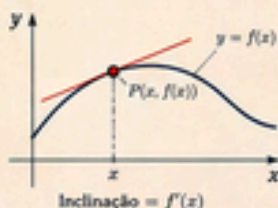
MODELAGEM
DO MUNDO REAL



ANÁLISE E
PREVISÃO

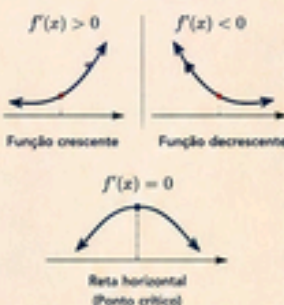
1 O QUE É DERIVADA?

A derivada de uma função em um ponto mede o quanto a função está variando naquele instante. É a inclinação da reta tangente ao gráfico da função naquele ponto.



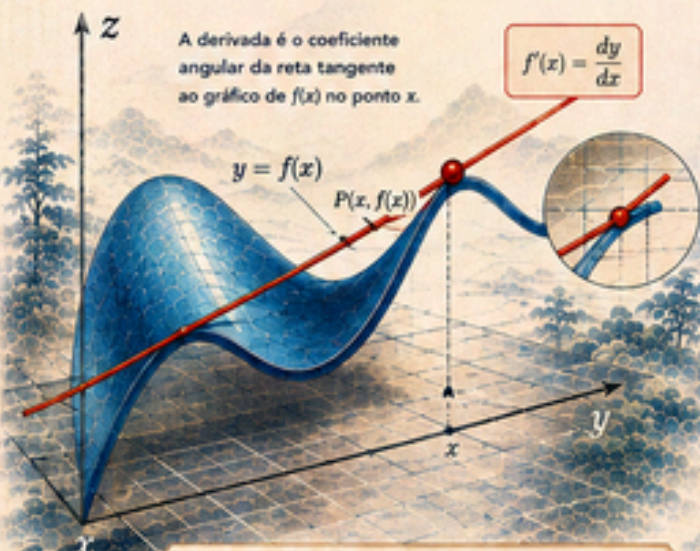
2 INTERPRETAÇÃO GEOMÉTRICA

A derivada representa a inclinação da reta tangente à curva.



A derivada é o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico de $f(x)$ no ponto x .

$$f'(x) = \frac{dy}{dx}$$



DEFINIÇÃO (DERIVADA)

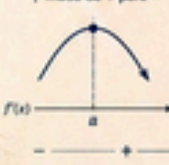
$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$h \rightarrow 0$: incremento que tende a zero.
 $f'(x)$: derivada de f em x .

5 EXTREMOS DA FUNÇÃO

Pontos onde $f'(x) = 0$ ou não existe.

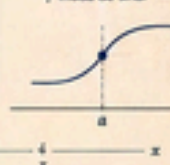
MÁXIMO LOCAL
 f muda de + para -



MÍNIMO LOCAL
 f muda de - para +



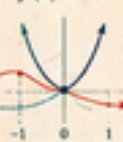
PONTO DE INFLEXÃO
 f muda de sinal



7 EXEMPLOS PRÁTICOS

$$f(x) = x^2$$

$$f'(x) = 2x$$



$$f(x) = \sin x$$

$$f'(x) = \cos x$$

A derivada de seno é cosseno: padrão de oscilação.

$$f(x) = e^x$$

$$f'(x) = e^x$$

A função exponencial tem o próprio ritmo de crescimento.

$$f(x) = \ln x$$

$$f'(x) = \frac{1}{x}$$

A taxa de variação diminui conforme x aumenta.

3 REGRAS DE DERIVAÇÃO

- $(c)' = 0$ (c constante)
- $(x)' = 1$
- $(k \cdot f(x))' = k \cdot f'(x)$
- $(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x)$
- $(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$
- $(e^x)' = e^x$
- $(\ln x)' = \frac{1}{x}$ ($x > 0$)
- $(\sin x)' = \cos x$
- $(\cos x)' = -\sin x$
- $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$ ($x \neq 0$)
- $(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$
- $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$ ($g \neq 0$)
- $(f \circ g)' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$
(Regra da Cadeia)

4 APLICAÇÕES

- Física: velocidade instantânea, aceleração, força.
- Engenharia: otimização de projetos e recursos.
- Economia: custo marginal, receita marginal.
- Medicina: taxa de crescimento de populações ou vírus.
- Computação: algoritmos de otimização e aprendizado.

6 NOTAÇÃO IMPORTANTE

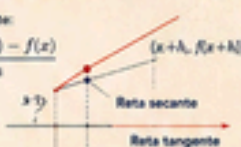
- $f'(x)$: derivada de f em x .
- $\frac{dy}{dx}$: razão de variação de y em relação a x .
- y' : outra forma comum de escrever $f'(x)$.
- $D^n f(x)$: derivada de n -ésima ordem.

8 LIMITES E DERIVADAS

Derivada definida por limite:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Conexão entre limite e taxa instantânea.



9 DERIVADA E TAXA DE VARIAÇÃO

Medida de variação instantânea.



$$\text{Velocidade instantânea: } v(t) = x'(t)$$

A derivada transforma dados em informação útil e acionável.

10 PROPRIEDADES IMPORTANTES

- ☒ Se $f'(x) > 0$, f é crescente.
- ☒ Se $f'(x) < 0$, f é decrescente.
- ☒ Se $f'(x) = 0$, possível ponto crítico.
- ☒ Se $f''(x) > 0$, concavidade para cima.
- ☒ Se $f''(x) < 0$, concavidade para baixo.

FATOS RÁPIDOS

- A derivada foi desenvolvida por Newton e Leibniz no século XVII.
- É uma das ferramentas mais poderosas da matemática.
- Permite entender e prever o comportamento do mundo real.



IDEIA CENTRAL

A derivada revela o que está acontecendo AGORA, com base no que acontece ao redor.



VISÃO INTUITIVA

Limite do quociente incremental quando o incremento é infinitamente pequeno.



LEMBRE-SE

Derivar é enxergar além dos pontos: é entender a tendência que guia o movimento.



CÁLCULO: DERIVADAS PARCIAIS

A TAXA DE VARIAÇÃO DE UMA FUNÇÃO DE
VÁRIAS VARIÁVEIS EM CADA DIREÇÃO

MULTIVARIÁVEL TAXAS DE VARIAÇÃO SUPERFÍCIES E CURVAS MODELAGEM DO MUNDO REAL OTIMIZAÇÃO ANÁLISE E PREVISÃO

1 O QUE SÃO?

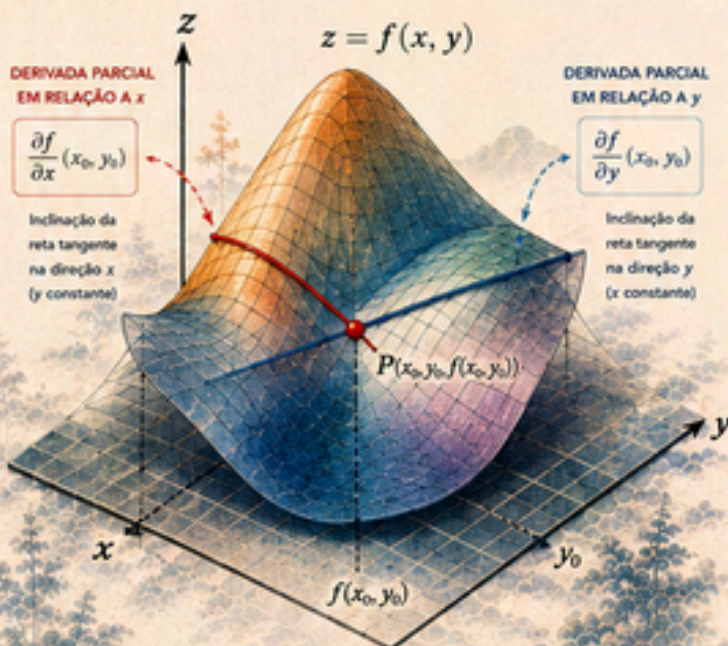
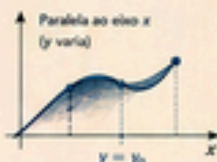
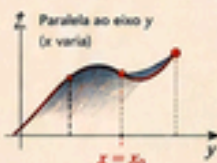
Derivadas parciais medem como a função $f(x, y)$ muda quando uma variável varia e a outra é mantida constante.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h, y) - f(x, y)}{h}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x, y+h) - f(x, y)}{h}$$

2 INTERPRETAÇÃO GEOMÉTRICA

As derivadas parciais são as inclinações das seções da superfície nas direções dos eixos coordenados.



EXEMPLO

Seja $f(x, y) = x^2y + \sin(xy)$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy + y \cos(xy) \quad \frac{\partial f}{\partial y} = x^2 + x \cos(xy)$$

Essas expressões indicam como f muda em cada direção no ponto (x, y) .

3 PROPRIEDADES IMPORTANTES

- Se f é diferenciável, então suas derivadas parciais existem.
- A ordem das derivadas parciais mistas pode ser trocada:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

(Teorema de Clairaut)

- As derivadas parciais são lineares.
- Regra da cadeia se aplica em funções compostas.

4 APLICAÇÕES

- Física: campos elétricos, temperatura, pressão.
- Engenharia: análise de tensões, mecânica dos fluidos.
- Economia: funções de produção, custos e lucros.
- Ciências: química, biologia, estatística.
- Computação: gradientes em machine learning.

5 GRADIENTE

O vetor gradiente reúne todas as derivadas parciais primeiras.

$$\nabla f(x, y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right)$$

Ele aponta para a direção de maior crescimento de f .



6 SEGUNDAS DERIVADAS PARCIAIS

Medem como as inclinações mudam.

Curvatura em x:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$$

Curvatura em y:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

Curvatura mista:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$$

Essenciais para classificar máximos, mínimos e pontos de sela.



7 CLASSIFICAÇÃO DE PONTOS CRÍTICOS

Seja $D = f_{xx}f_{yy} - (f_{xy})^2$

- $D > 0$ e $f_{xx} > 0 \rightarrow$ Mínimo local
- $D > 0$ e $f_{xx} < 0 \rightarrow$ Máximo local
- $D < 0 \rightarrow$ Ponto de sela
- $D = 0 \rightarrow$ Teste inconclusivo

8 EXEMPLOS RÁPIDOS

$$f(x, y) = x^2 + y^3$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 3y^2$$



$$f(x, y) = \sin(xy)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y \cos(xy)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x \cos(xy)$$



$$f(x, y) = e^x \sin(y)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = e^x \sin(y)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = e^x \cos(y)$$



9 DICA DE OURO

- Fixe uma variável e derive em relação à outra.
- Visualize seções da superfície.
- Pratique com gráficos 3D.
- Entenda o significado físico.



10 EM RESUMO

Derivadas parciais revelam como funções multivariáveis mudam em cada direção.



Entendimento mais profundo



Modelos mais precisos



Decisões melhores



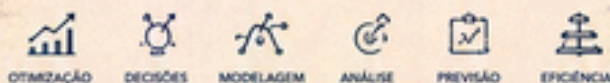
Mundo real melhor explicado



学ぶ

CÁLCULO: MÁXIMOS E MÍNIMOS

ENCONTRE OS PONTOS DE MAIOR E MENOR VALOR
DE UMA FUNÇÃO E ENTENDA SEU COMPORTAMENTO



1 O QUE SÃO?

Máximos e mínimos são os pontos onde uma função atinge seu maior ou menor valor em uma região.

Máximo local: valor maior que os vizinhos próximos.

Mínimo local: valor menor que os vizinhos próximos.

Máximo global: maior valor em todo o domínio.

Mínimo global: menor valor em todo o domínio.

2 CONDIÇÃO NECESSÁRIA (PONTOS CRÍTICOS)

Se f é diferenciável em (x_0, y_0) e tem máximo ou mínimo em (x_0, y_0) , então:

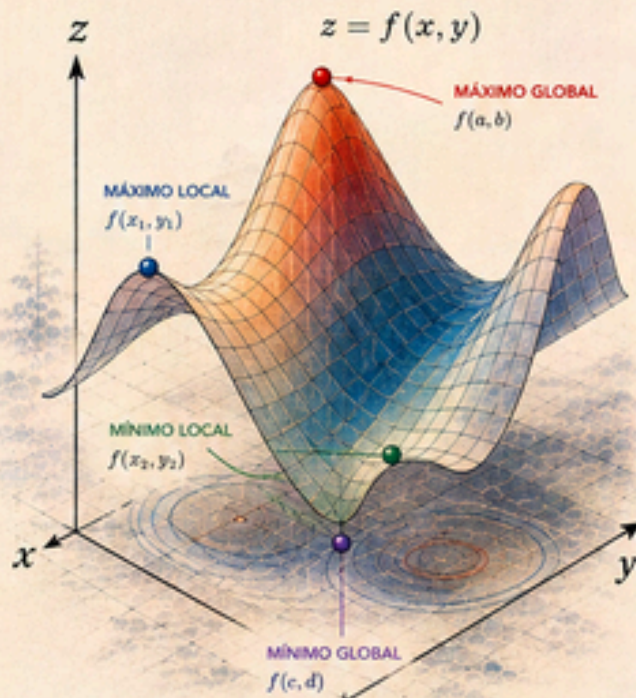
$$f_x(x_0, y_0) = 0$$

$$f_y(x_0, y_0) = 0$$

Onde:

f_x e f_y são as derivadas parciais de $f(x, y)$.

Os pontos que satisfazem essas equações são chamados de pontos críticos.



3 TESTE DA SEGUNDA DERIVADA (FUNÇÕES DE DUAS VARIÁVEIS)

Defina o discriminante:

$$D = f_{xx}f_{yy} - (f_{xy})^2$$

$D > 0$ e $f_{xx} > 0$	Mínimo local
$D > 0$ e $f_{xx} < 0$	Máximo local
$D < 0$	Ponto de sela
$D = 0$	Teste inconclusivo

Onde:

$$f_{xx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \quad f_{yy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}, \quad f_{xy} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$$

4 INTERPRETAÇÃO GEOMÉTRICA

- Mínimo local:** A superfície tem formato de "tigela".
- Máximo local:** A superfície tem formato de "cúpula".
- Ponto de sela:** A superfície sobe em uma direção e desce na outra.

5 COMO ENCONTRAR MÁXIMOS E MÍNIMOS



6 EXEMPLOS PRÁTICOS

Exemplo 1

$$f(x, y) = x^2 + y^2$$

$$f_x = 2x$$

$$f_y = 2y$$

$$f_x = 0 \Rightarrow x = 0$$

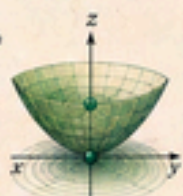
$$f_y = 0 \Rightarrow y = 0$$

$$\text{Ponto crítico: } (0, 0)$$

$$f_{xx} = 2, f_{yy} = 2, f_{xy} = 0$$

$$D = 2 \cdot 2 - 0 = 4 > 0$$

$$f_{xx} > 0 \Rightarrow \text{MÍNIMO LOCAL (que é GLOBAL)}$$



Exemplo 2

$$f(x, y) = x^2 - y^2$$

$$f_x = 2x$$

$$f_y = -2y$$

$$f_x = 0 \Rightarrow x = 0$$

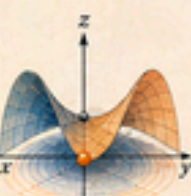
$$f_y = 0 \Rightarrow y = 0$$

$$\text{Ponto crítico: } (0, 0)$$

$$f_{xx} = 2, f_{yy} = -2, f_{xy} = 0$$

$$D = 2(-2) - 0 = -4 < 0$$

$$\Rightarrow \text{PONTO DE SELA}$$



8 NAS FRONTEIRAS DO DOMÍNIO

Sempre avalie f nos pontos críticos internos E também nas fronteiras (borda) da região, pois os extremos globais podem estar lá.



9 DICA RÁPIDA

Não esqueça: o teste da segunda derivada funciona apenas para funções de duas variáveis e em pontos críticos internos. Para mais variáveis, existem extensões usando matrizes Hessianas.



10 CURIOSIDADE

O conceito de máximos e mínimos é usado desde a antiguidade na busca por problemas de áreas, volumes e trajetórias ótimas. Hoje, é a base da otimização moderna e da inteligência artificial.



積分

SEKIBUN

Somar o infinito para entender o todo.



CÁLCULO: INTEGRAIS

A LINGUAGEM DA ACUMULAÇÃO E DA TRANSFORMAÇÃO

Integrais medem áreas, volumes, acumulam quantidades e revelam padrões ocultos. São a ponte entre o infinito pequeno e o mundo real.

知恵

CHIE

Conhecimento transforma complexidade em clareza.



01 O QUE É INTEGRAL?

A integral é a operação inversa da derivada.

Ela representa a soma contínua de infinitas parcelas.

$$\int f(x) dx$$

Integral indefinida (família de funções)

$$\int_a^b f(x) dx$$

Integral definida (valor numérico entre os limites a e b)

02 TIPOS DE INTEGRAIS

• INDEFINIDA

$$\int f(x) dx = F(x) + C$$

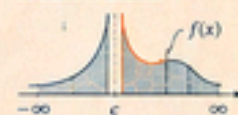
(C é a constante de integração)

• DEFINIDA

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

• IMPRÓPRIAS

Lidam com limites infinitos ou descontinuidades.



05 TÉCNICAS DE INTEGRAÇÃO

SUBSTITUIÇÃO

$$u = g(x)$$

$$du = g'(x) dx$$

$$\int f(g(x)) g'(x) dx = \int f(u) du$$

POR PARTES

$$\int u dv = uv - \int v du$$

$$u \rightarrow du$$

$$dv \rightarrow v$$

Útil para produtos de funções.

FRAÇÕES PARCIAIS

Decomposição de frações racionais em termos mais simples.

$$\frac{3x+1}{(x-1)(x+2)}$$

$$\frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2}$$

TRIGONOMÉTRICAS

Substituições como $x = a \sin \theta$ ou $x = a \tan \theta$ facilitam integrais envolvendo raízes.



TRIGONOMÉTRICAS (POTÊNCIAS)

Redução de potência para $\sin^n x$, $\cos^n x$ (n par ou ímpar).

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$$

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$$

INTEGRAIS NUMÉRICAS

Aproxima valores quando não há solução analítica.



06 APLICAÇÕES NO MUNDO REAL



Física
Cálculo de trabalho, energia e fluxo.



Engenharia
Dimensionamento, centro de massa, momentos de inércia.



$$V = \int_a^b A(x) dx$$

Volume de um sólido por seções.



Economia
Cálculo de custos, receita e excedentes.



Ciência de Dados
Funções de perda, expectativas e distribuições.

07 TEOREMA FUNDAMENTAL DO CÁLCULO

Conecta derivadas e integrais.

Se $F'(x) = f(x)$, então

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

Base para o cálculo moderno e para métodos numéricos.

08 CURIOSIDADES



Leibniz e Newton
Desenvolveram o cálculo de formas independentes no século XVII.



O símbolo $\int$
Vem da letra alongada "S" de "summa" (soma) na matemática clássica.



Infinito que soma
Integrais transformam infinitos detalhes em respostas finitas e úteis.

DADO RÁPIDO

$$\int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}$$

Área sob $y = x^2$ entre 0 e 1.



IDEIA ESSENCIAL

Integrar é enxergar o todo que nasce das infinitas partes.



Infinito



Modela o real



Gera conhecimento



Transforma o mundo

ÁLGEBRA LINEAR: NOTAÇÃO DE VETORES E MATRIZES

A LINGUAGEM DA ESTRUTURA, DA TRANSFORMAÇÃO E DA RESOLUÇÃO

ESTRUTURA REPRESENTAÇÃO TRANSFORMAÇÕES SISTEMAS APLICAÇÕES FUNDAMENTOS

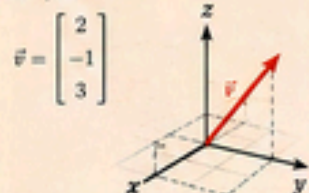
1 VETORES: NOTAÇÃO E REPRESENTAÇÃO

Um vetor $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ é uma lista ordenada de n números reais.

Notação coluna:

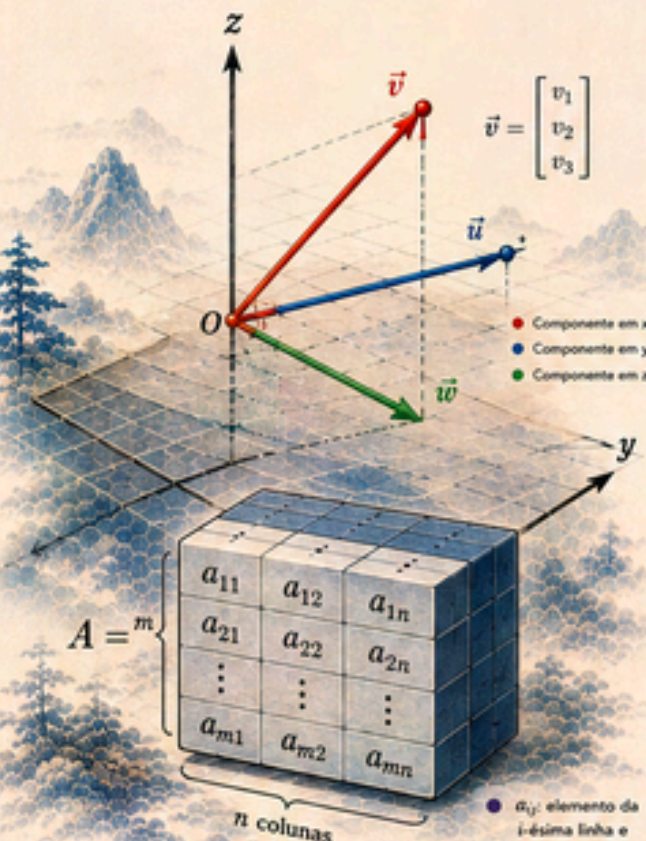
$$\vec{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} v_1: 1^\text{a} \text{ componente} \\ v_2: 2^\text{a} \text{ componente} \\ v_n: n\text{-ésima componente} \end{array}$$

Exemplo em $\mathbb{R}^3$:



2 TIPOS DE VETORES

- Vetor nulo: $\vec{0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$
- Vetores iguais: $\vec{u} = \vec{v}$ (mesma direção e módulo)
- Vetores opostos: $\vec{u} = -\vec{v}$
- Combinação linear: $\alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$ ($\alpha, \beta \in \mathbb{R}$)

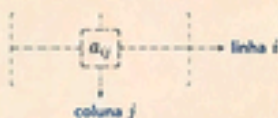


3 MATRIZES: NOTAÇÃO E ESTRUTURA

Uma matriz $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ possui m linhas e n colunas.

Notação geral:

$$A = [a_{ij}], \quad \text{onde } i = 1, 2, \dots, m \text{ e } j = 1, 2, \dots, n$$



Exemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 4 \\ 2 & -2 & 5 \end{bmatrix} \quad A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

4 TIPOS ESPECIAIS DE MATRIZES

- Matriz linha: $1 \times n$
- Matriz coluna: $m \times 1$
- Matriz quadrada: $n \times n$
- Matriz nula: $0_{m \times n}$
- Matriz identidade: I_n
- Matriz diagonal: elementos fora da diagonal principal = 0

7 SISTEMA LINEAR EM NOTAÇÃO MATRICIAL

$$Ax = b$$

Onde:

$$A \in \mathbb{R}^{m \times n}$$

$$x \in \mathbb{R}^n$$

$$b \in \mathbb{R}^m$$

$$m \times n + n = m$$

Representa m equações e n incógnitas.

5 OPERAÇÕES COM VETORES

Soma

$$\vec{u} + \vec{v} = \begin{bmatrix} u_1 + v_1 \\ u_2 + v_2 \\ \vdots \\ u_n + v_n \end{bmatrix}$$

Multiplicação por escalar

$$\alpha\vec{u} = \begin{bmatrix} \alpha u_1 \\ \alpha u_2 \\ \vdots \\ \alpha u_n \end{bmatrix}$$

Produto escalar

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \sum_{i=1}^n u_i v_i$$

6 OPERAÇÕES COM MATRIZES

Soma

$$A + B = [a_{ij} + b_{ij}]$$

Multiplicação por escalar

$$\alpha A = [\alpha a_{ij}]$$

Produto de matrizes

$$A_{m \times n} B_{n \times p} = C_{m \times p}$$

Elemento (i, j) de C :

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj}$$

8 INTERPRETAÇÃO GEOMÉTRICA

$\mathbb{R}^2$:



$\mathbb{R}^3$:



9 TRANSFORMAÇÕES LINEARES

$$y = Ax$$

A matriz A transforma o vetor x em um novo vetor y .

Inclui rotações, reflexões, projeções e escalas.



10 DICAS RÁPIDAS

- ✓ Sempre observe as dimensões.
- ✓ Verifique compatibilidade antes de multiplicar.
- ✓ Interprete geometricamente.
- ✓ Pratique com exemplos simples.
- ✓ A notação é a base da compreensão!



Vetores descrevem
direções e magnitudes.



Matrizes organizam
dados e transformações.



Operações seguem
regras precisas.



Modelam sistemas
reais complexos.



Base para ciência de dados,
IA, engenharia e física.



PRODUTO ESCALAR: E PRODUTO VETORIAL

DUAS OPERAÇÕES FUNDAMENTAIS QUE REVELAM
ÂNGULOS, PROJEÇÕES, ÁREAS E DIREÇÕES NO ESPAÇO



GEOMETRIA



FÍSICA



ENGENHARIA



COMPUTAÇÃO



NAVEGAÇÃO



CIÊNCIA DE DADOS

1 PRODUTO ESCALAR (OU PRODUTO INTERNO)

Mede a relação entre dois vetores
através do ângulo entre eles.

1.1 REPRESENTAÇÃO



$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta$$

onde θ é o ângulo entre $\vec{a}$ e $\vec{b}$.

1.2 PROPRIEDADES

- Comutativo: $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$
- Distributivo: $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$
- Escalar: $(k\vec{a}) \cdot \vec{b} = k(\vec{a} \cdot \vec{b})$
- $\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2$
- $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$

1.3 INTERPRETAÇÕES GEOMÉTRICAS

- Projeção de $\vec{a}$ sobre $\vec{b}$:

$$\text{proj}_{\vec{b}} \vec{a} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|} \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}$$

- Trabalho realizado por uma força $\vec{F}$
ao longo de um deslocamento $\vec{d}$:

$$W = \vec{F} \cdot \vec{d}$$



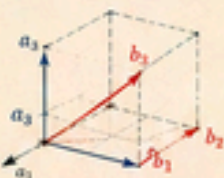
1.4 EXEMPLOS

- Ângulo: se $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$, então $\theta = 90^\circ$.
- Mesma direção: $\theta = 0^\circ \Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}|$.
- Direções opostas: $\theta = 180^\circ \Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = -|\vec{a}| |\vec{b}|$.

1.5 FÓRMULA EM COMPONENTES

Se $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ e $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$,
então:

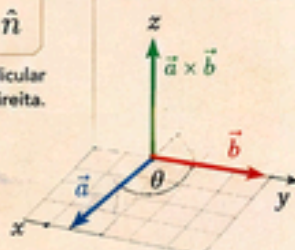
$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$



2 PRODUTO VETORIAL (OU PRODUTO EXTERNO)

Gera um vetor perpendicular aos
dois vetores dados.

2.1 REPRESENTAÇÃO



$$\vec{a} \times \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \theta \hat{n}$$

onde $\hat{n}$ é um vetor unitário perpendicular
a $\vec{a}$ e $\vec{b}$, seguindo a regra da mão direita.

2.2 PROPRIEDADES

- Não comutativo: $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$
- Distributivo: $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$
- Escalar: $(k\vec{a}) \times \vec{b} = k(\vec{a} \times \vec{b})$
- $\vec{a} \times \vec{a} = \vec{0}$
- $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{a} \parallel \vec{b}$

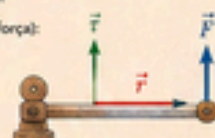
2.3 INTERPRETAÇÕES GEOMÉTRICAS

- Módulo = área do paralelogramo
formado por $\vec{a}$ e $\vec{b}$:

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \theta$$

- Direção: perpendicular ao plano de $\vec{a}$ e $\vec{b}$
(regra da mão direita).
- Torque (momento de força):

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$$



2.4 EXEMPLO VISUAL

$\vec{a}$ empurra $\vec{b}$ para cima seguindo
a regra da mão direita.



2.5 FÓRMULA EM COMPONENTES

Se $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ e $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$, então:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

$$= (a_2 b_3 - a_3 b_2) \hat{i} - (a_1 b_3 - a_3 b_1) \hat{j} + (a_1 b_2 - a_2 b_1) \hat{k}$$

3 COMPARAÇÃO RÁPIDA

PRODUTO ESCALAR

- Resultado: número real
- Relação: ângulo, projeção
e trabalho
- Simétrico: $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$
- Zero quando:
vetores perpendiculares



PRODUTO VETORIAL

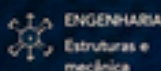
- Resultado: vetor
- Relação: área, direção e torque
- Antissimétrico: $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$
- Zero quando: vetores paralelos



4 APLICAÇÕES NO MUNDO REAL



FÍSICA
Forças e
movimento



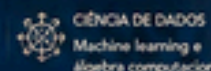
ENGENHARIA
Estruturas e
mecânica



COMPUTAÇÃO
Gráficos e
inteligência artificial



NAVEGAÇÃO
Orientação e
trajetórias



CIÊNCIA DE DADOS
Machine learning e
álgebra computacional

FATO RÁPIDO

O produto escalar mede "quanto está
na mesma direção". O produto vetorial
mede "o quanto eles giram um sobre o outro".

MATRIZ IDENTIDADE, INVERSA E TRANSPOSTA

A base da álgebra linear para transformar e resolver sistemas

ESTRUTURA PROPRIEDADES OPERAÇÕES UTILIDADES APLICAÇÕES FUNDAMENTOS

1 MATRIZ IDENTIDADE

É a matriz quadrada que não altera outras matrizes na multiplicação.

$$I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}_{n \times n}$$

PROPRIEDADES

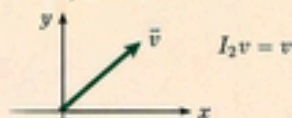
- I_n é quadrada de ordem n .
- $AI_n = A$ e $I_m A = A$ (dimensões compatíveis).
- Elementos na diagonal principal são 1.
- Demais elementos são 0.

EXEMPLO

$$I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

INTERPRETAÇÃO GEOMÉTRICA

Multiplicar por I_n mantém o vetor ou a transformação inalterada.



2 MATRIZ INVERSA

É a matriz que "desfaz" a transformação linear realizada por outra matriz.

DEFINIÇÃO

A matriz A é inversível se existe A^{-1} tal que:

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$$

CONDIÇÕES DE EXISTÊNCIA

- A deve ser quadrada.
- $\det(A) \neq 0$ (determinante diferente de zero).

CÁLCULO (2x2)

Se $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ e $\det(A) = ad - bc \neq 0$, então:

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

EXEMPLO

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \quad \det(A) = 2 \cdot 4 - 1 \cdot 3 = 5$$

$$A^{-1} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$$

INTERPRETAÇÃO GEOMÉTRICA

A^{-1} reverte a transformação de A , levando de volta ao original.



4 RELAÇÕES IMPORTANTES ENTRE AS MATRIZES

IDENTIDADE

$$AI_n = A$$

$$I_m A = A$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

INVERSA

$$AA^{-1} = I_n$$

$$A^{-1}A = I_n$$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

TRANSPOSTA

$$(A^T)^T = A$$

$$(AB)^T = B^T A^T$$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$$

3 MATRIZ TRANSPOSTA

Obtida ao trocar linhas por colunas. Reflete a matriz em relação à diagonal principal.

DEFINIÇÃO

Se $A = [a_{ij}]_{m \times n}$, então sua transposta A^T é a matriz $n \times m$ definida por $A^T = [a_{ji}]$.

EXEMPLO

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}_{2 \times 3} \quad A^T = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}_{3 \times 2}$$

REFLEXÃO NA DIAGONAL PRINCIPAL



PROPRIEDADES

- $(A^T)^T = A$
- $(A + B)^T = A^T + B^T$
- $(kA)^T = kA^T$
- $(AB)^T = B^T A^T$
- $\det(A^T) = \det(A)$
- $rg(A^T) = rg(A)$

INTERPRETAÇÃO GEOMÉTRICA

Representa reflexão da transformação linear em relação à diagonal principal.



5 APLICAÇÕES PRÁTICAS

- Computação gráfica: Transformações e rotações
- Engenharia: Análise estrutural e circuitos
- Física: Sistemas de equações lineares
- Ciência de dados: Redução de dimensão e PCA
- Economia: Modelos e previsões
- Inteligência Artificial: Machine Learning e Redes Neurais

6 RESUMO RÁPIDO

IDENTIDADE

Não altera nada na multiplicação.

- Neutro multiplicativo

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

INVERSA

Desfaz a transformação da matriz original.

- Existe se $\det(A) \neq 0$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

TRANSPOSTA

Troca linhas por colunas e reflete na diagonal.

- Essencial em cálculos e modelos

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$$

FATO RÁPIDO

Essas três operações são fundamentais para resolver problemas reais em diversas áreas do conhecimento.

TRANSFORMAÇÕES LINEARES

A PONTE ENTRE VETORES, ESPAÇOS E MATRIZES

Estrutura • Funcionamento • Propriedades • Aplicações • Intuição Geométrica



ESTRUTURA



PROPRIEDADES



GEOMETRIA



MATRIZES



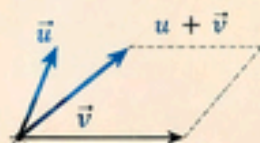
APLICAÇÕES



INTUIÇÃO

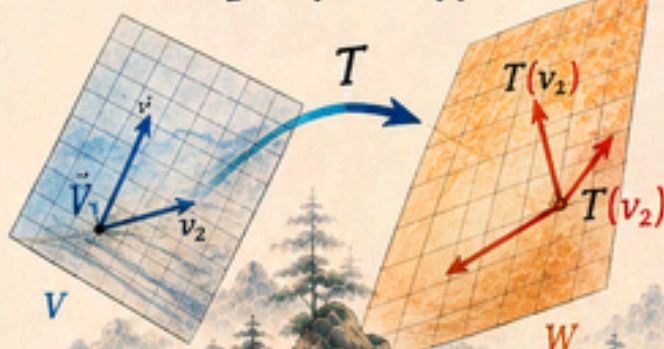
1 O QUE É?

$T: V \rightarrow W$ é linear se transforma vetores de V em vetores de W , preservando combinações lineares.



- Soma preservada
 $T(u + v) = T(u) + T(v)$
- Escala preservada
 $T(\alpha v) = \alpha T(v)$

$$T: V \rightarrow W$$



3 PROPRIEDADES IMPORTANTES

- Imagem de 0: $T(0) = 0$
- Preserva combinações lineares
- T é determinada por seus valores na base
- Composição: $(S \circ T)(v) = S(T(v))$
- Identidade: $I(v) = v$
- T é isomorfismo $\Leftrightarrow T$ é bijetora

2 MATRIZ DA TRANSFORMAÇÃO

Se $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ é base de V e $C = \{w_1, \dots, w_m\}$ é base de W , então:

$$[T]_C = \begin{bmatrix} T(v_1) & T(v_2) & \dots & T(v_n) \end{bmatrix}_C$$

A matriz $A = [T]_C^B$ representa T .

Para qualquer v com coordenadas $[v]_B$:

$$[T(v)]_C = A[v]_B$$

DEFINIÇÃO

Uma transformação linear T entre espaços vetoriais V e W é uma função que preserva soma e multiplicação por escalar:

$$T(u + v) = T(u) + T(v)$$

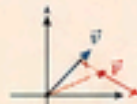
$$T(\alpha v) = \alpha T(v)$$

para todos $u, v \in V$ e $\alpha \in \mathbb{R}$.

4 EXEMPLOS GEOMÉTRICOS

Rotação (2D)

Gira todos os vetores de um ângulo θ .



Alongamento

Multiplica uma direção por um fator k .



Reflexão

Espelha os vetores em relação a um eixo.



Projeção

"Sombra" ortogonal em uma direção.



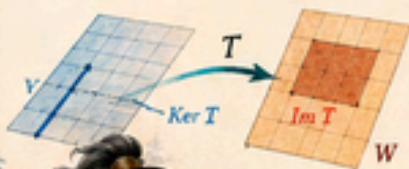
5 NÚCLEO E IMAGEM

Núcleo ($\text{Ker } T$): vetores que vão para 0.

$$\text{Ker } T = \{v \in V : T(v) = 0\}$$

Imagem ($\text{Im } T$): todos os vetores alcançados.

$$\text{Im } T = \{T(v) : v \in V\}$$



6 COMPOSIÇÃO E INVERSA

Composição

$$(S \circ T)(v) = S(T(v))$$

Matrizes:

$$[S \circ T] = [S][T]$$

$$\begin{bmatrix} \dots \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dots \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} \dots \end{bmatrix}$$

Inversa

T é invertível se existe T^{-1} tal que $T^{-1} \circ T = I$.

Matrizes:

$$[T^{-1}] = [T]^{-1}$$

$$\begin{bmatrix} \dots \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} \dots \end{bmatrix}^{-1}$$

7 RANK-NULITY (TEOREMA FUNDAMENTAL)

Para $T: V \rightarrow W$, com V de dimensão n :

$$\dim(\text{Ker } T) + \dim(\text{Im } T) = n$$

Relaciona o "quanto perde" com o "quanto alcança".

8 APLICAÇÕES



Computação gráfica: rotações, projeções e transformações 3D.



Ciência de dados: redução de dimensionalidade (PCA).



Engenharia: mudanças de base, sistemas de coordenadas.



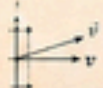
Física: transformações de forças, deformações e simetrias.

9 EXEMPLOS DE MATRIZES E AÇÕES

Identidade (I)

Não altera nada.

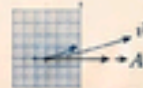
$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



Escala

Alonga/comprime eixos.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix}$$



Rotação (θ)

Gira o vetor no plano.

$$R = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$



Reflexão (eixo x)

Espelha em relação ao eixo x.

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$



10 EM RESUMO

Preserva combinações lineares



Representada por matrizes



Transforma vetores e espaços



Tem núcleo e imagem



Liga álgebra e geometria



Essencial em ciência e tecnologia

FATO RÁPIDO

Toda transformação linear pode ser estudada completamente pela ação em uma base e representada por uma matriz!

NORMAS L1 E L2

DUAS FORMAS DE MEDIR DISTÂNCIAS,
DUAS MANEIRAS DE ENTENDER O ESPAÇO



GEOMETRIA



ANÁLISE



MACHINE
LEARNING



OTIMIZAÇÃO



CIÊNCIA DE
DADOS



ENGENHARIA

1 O QUE SÃO NORMAS?

Normas medem o "tamanho" ou a "distância" de vetores em $\mathbb{R}^n$.

Seja $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ um vetor.

As normas L_1 e L_2 são definidas como:

NORMA L1 (OU NORMA DO TAXISTA)

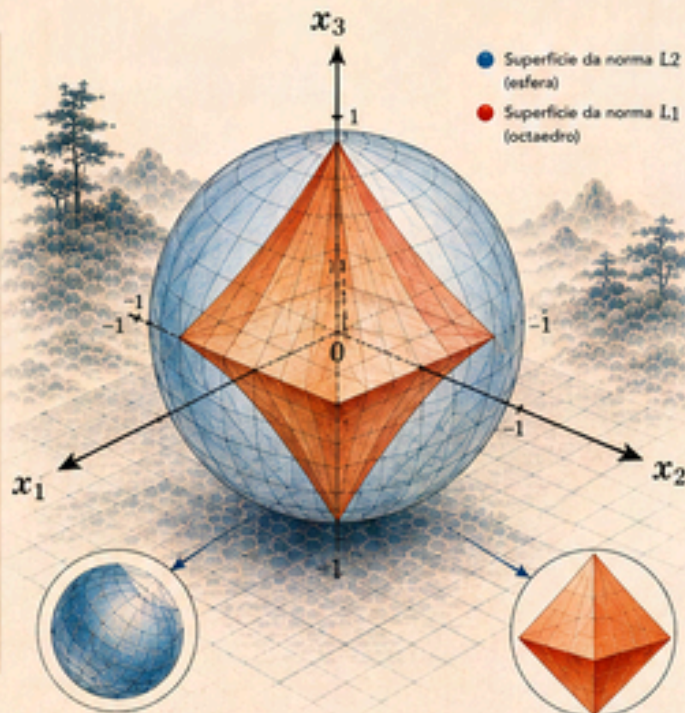
$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$$

Soma dos valores absolutos das componentes.

NORMA L2 (OU NORMA EUCLIDIANA)

$$\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$$

Raiz da soma dos quadrados das componentes.



2 INTERPRETAÇÃO GEOMÉTRICA

NORMA L2

A esfera de raio 1 centrada na origem é o conjunto:

$$\{x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_2 = 1\}$$

Todos os vetores na esfera têm o mesmo comprimento euclidiano.

NORMA L1

O octaedro de raio 1 centrado na origem é o conjunto:

$$\{x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_1 = 1\}$$

A forma lembra um diamante (em 2D, é um losango).

EM 2D

L2: círculo



L1: losango



3 EXEMPLOS NUMÉRICOS

Considere $x = (3, -4) \in \mathbb{R}^2$

NORMA L1

$$\|x\|_1 = |3| + |-4| = 3 + 4 = 7$$



NORMA L2

$$\|x\|_2 = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = \sqrt{9 + 16} = 5$$



4 PROPRIEDADES FUNDAMENTAIS

NORMA L1

- $\|x\|_1 \geq 0$ e $\|x\|_1 = 0$ se, e somente se, $x = 0$
- $\|\alpha x\|_1 = |\alpha| \|x\|_1$
- $\|x + y\|_1 \leq \|x\|_1 + \|y\|_1$ (desigualdade triangular)

NORMA L2

- $\|x\|_2 \geq 0$ e $\|x\|_2 = 0$ se, e somente se, $x = 0$
- $\|\alpha x\|_2 = |\alpha| \|x\|_2$
- $\|x + y\|_2 \leq \|x\|_2 + \|y\|_2$ (desigualdade triangular)

RELAÇÃO ENTRE ELAS

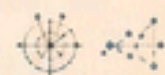
Para todo $x \in \mathbb{R}^n$:

$$\|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq \sqrt{n} \|x\|_2$$

5 USOS E APLICAÇÕES

NORMA L1

- Promove esparsidade (muitos zeros)
- Usada em regressão Lasso
- Robusta a outliers

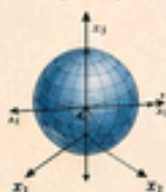


NORMA L2

- Distância euclidiana clássica
- Usada em k-means, PCA
- Suaviza variações e penaliza grandes erros

6 COMPARAÇÃO VISUAL EM 3D

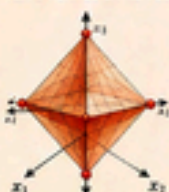
NORMA L2 (ESFERA)



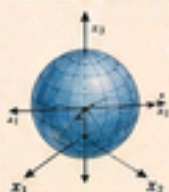
NORMA L1 (OCTAEDRO)



EM 3D, A NORMA L1 TEM 6 PONTOS EXTREMOS



ENQUANTO A NORMA L2 É SUAVE E ARREDONDADA



7 CURIOSIDADES

- A norma L_1 vem da geometria dos caminhos em grade (movimento horizontal e vertical).
- A norma L_2 é induzida pelo teorema de Pitágoras.
- Em altos dimensionais, a bola L_1 é "mais pontuda" que a bola L_2 .

EM RESUMO

NORMA L1

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$$

Forma: octaedro (losango em 2D)



NORMA L2

$$\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$$

Forma: esfera (círculo em 2D)



RELAÇÃO

$$\|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq \sqrt{n} \|x\|_2$$



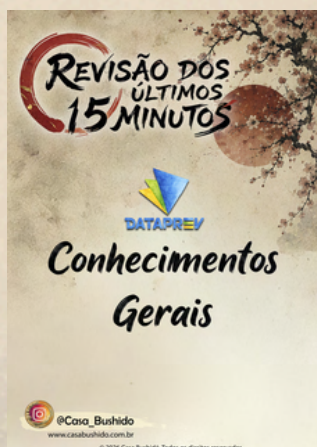
INTERPRETAÇÃO

Dois formas diferentes de medir o "tamanho" de um vetor.

DICA RÁPIDA

- Use L_1 para esparsidade
- Use L_2 para suavidade
- Entenda a geometria para escolher melhor!

Jabá básico



Clique aqui para
comprar

Veja também a
revisão dos 15
minutos para
conhecimentos
gerais do concurso
Dataprev!

Cupom por tempo limitado (10% off)

DATAPREV10

Preço normal: R\$ 22,90



Clique aqui para
comprar

Veja também o material
analisando a banca, falando
da Dataprev, dicas de
estudos para passar na frente
da concorrência, matérias
importantes e muito mais!

Cupom por tempo limitado (10% off)

DATAPREV10

Preço normal: R\$ 15,90

www.casabushido.com.br

Sugestões, críticas, ombro amigo, ajuda nos estudos. Podem contar comigo.
Entre em contato pelo canal do Instagram.



Casa Bushido

Com carinho
Vitor Scooby

